1. Montrer que la matrice $(I + A^{-1}\delta A)$ est inversible et que

$$\|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\delta A\|}$$

2. Montrer que

$$\delta x = (I + A^{-1}\delta A)^{-1} A^{-1}(\delta b - (\delta A)x)$$

3. Montrer que

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq Cond(A) \frac{1}{1 - \|\delta A\|\,\|A^{-1}\|} \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

4. Montrer que la majoration d'erreur ci-dessus est optimale.

Ex-6 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} F: & M_n(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & F(A) = \sqrt{trace(A^* A)} \end{array}$$

où $trace(A)$ est la somme des éléments diagonaux de A.

1. Montrer que $F(A)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2$. Déduire que $F(A)$ est une norme.
2. Calculer $F(I)$. Déduire que cette norme ne peut pas être subordonnée à une norme vectorielle.
3. Démontrer que la norme F est une norme matricielle.

Ex-7 : Soit A une matrice inversible dans $M_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'elle se décompose sous la forme $A = I - B$ avec $\| B \| < 1$ pour une certaine norme ~~subordonnée~~ matricielle. Montrer que :

$$\| A^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| B \|}$$

Ex-8 : Soit A une matrice réelle carrée de dimension n.

1. Montrer que $\| A \|_2^2 = \rho(A^* A)$
2. Montrer si A est symétrique

$$Cond(A) = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}$$